

INKONSISTENSI LIMIT FUNGSI TRIGONOMETRI PADA FUNGSI KOSINUS DAN SINUS

Enos Lolang

Program Studi Pendidikan Matematika
Universitas Kristen Indonesia Toraja
enos@ukitoraja.ac.id

ABSTRAK

Berbagai peristiwa alam memiliki sifat periodik. Medan-medan elektromagnetik terbentuk pada garis-garis yang periodik jaraknya dari sumber medannya, irama jantung yang berdetak periodik dengan waktu tertentu, pasang surut, perubahan cuaca, terjadi dalam jangka waktu yang dapat digambarkan sebagai suatu fungsi periodik. Sifat yang periodik seperti itu dapat dijelaskan dengan fungsi sinus dan kosinus. Limit fungsi adalah nilai pendekatan suatu fungsi jika variabel fungsi tersebut mendekati nilai tertentu. Limit memegang peranan penting dalam kalkulus untuk mendefinisikan kontinuitas, turunan, dan integral. Nilai suatu limit adalah nilai pendekatan suatu fungsi yang diperoleh jika nilai variabelnya mendekati nilai tertentu. Tetapi penerapan limit untuk menentukan turunan fungsi sinus dan cosinus tidak konsisten pada pendekatan $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ untuk mencari turunan fungsi tersebut. Bagian yang mengandung \cos , nilai $h \approx 0 = 0$. Pada bagian yang mengandung \sin , $h \approx 0 \neq 0$. Tidak ada teorema atau definisi yang mengatur sifat seperti itu.

Kata Kunci: Inkonsistensi, limit fungsi trigonometri, sinus, cosinus

I. PENDAHULUAN

Limit fungsi adalah nilai pendekatan suatu fungsi jika variabel fungsi tersebut mendekati nilai tertentu. Limit memegang peranan penting dalam kalkulus untuk mendefinisikan kontinuitas, turunan, dan integral. Secara umum, fungsi didefinisikan sebagai berikut: misalkan A dan B adalah himpunan-himpunan tak kosong. Suatu fungsi atau pemetaan dari A ke B adalah subset f dari pasangan berurutan $A \times B$ sedemikian sehingga untuk setiap $a \in A$ terdapat terdapat satu $b \in B$ dimana $(a, b) \in f$. Himpunan A adalah *domain*, dan himpunan B adalah *codomain* dari f .

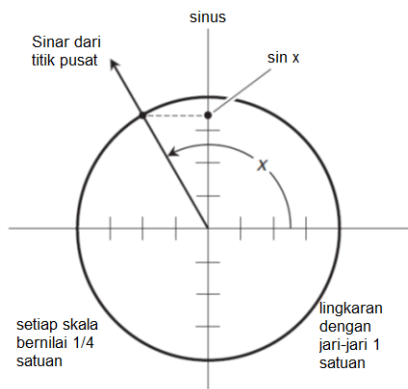
Fungsi trigonometri berkaitan dengan sudut-sudut. Model lingkaran satuan pada Gambar 1

menyatakan sinus x ($\sin x$) untuk semua sudut x yang mungkin. Nilai x dinyatakan dalam radian (rad). Sudut positif bergerak berlawanan arah jarum jam dari sebelah kanan sumbu horisontal. Sudut negatif bergerak searah jarum jam. Setiap skala menyatakan $\frac{1}{4}$ bagian, sehingga lingkaran tersebut memiliki jari-jari 1 satuan.

Sinus dari suatu sudut adalah koordinat sumbu vertikal dari titik dimana sinar radial memotong lingkaran. Karena lingkaran ini memiliki jari-jari 1 satuan, maka fungsi sinus tidak akan pernah bernilai lebih besar dari +1 atau lebih kecil dari -1. Gambar 1 memperlihatkan situasi dari suatu sudut sebesar $2\pi/3$ radian ($x = 2\pi/3$), yaitu $1/3$ rotasi.

Fungsi sudut trigonometri dinyatakan dalam radian (bukan derajat) kecuali jika dinyatakan

dalam satuan lainnya secara spesifik. Fungsi si-



Gambar 1: Model lingkaran satuan untuk fungsi sinus. Sudut x dinyatakan dalam radian, dan diukur dari sisi kanan sumbu horizontal. Setiap skala menyatakan $\frac{1}{4}$ satuan.

nus maupun cosinus terdefinisi, kontinu, dan dapat didiferensialkan dalam domain himpunan semua bilangan real. Sudut sebesar 2π menyatakan rotasi penuh berlawanan arah jarum jam dari suatu sinar yang berasal dari titik pusat. Sudut yang lebih besar dari 2π menyatakan rotasi yang lebih dari satu putaran penuh berlawanan arah jarum jam. Sudut negatif searah dengan jarum jam. Sudut $-2\pi/3$ menyatakan rotasi $1/3$ putaran searah jarum jam. Sudut -2π menyatakan rotasi 1 putaran penuh searah jarum jam. Sudut yang lebih kecil dari -2π menyatakan rotasi yang lebih dari 1 putaran penuh searah jarum jam.

A. Limit Fungsi

Di dalam kalkulus, nilai suatu limit adalah nilai pendekatan suatu fungsi yang diperoleh jika nilai variabelnya mendekati nilai tertentu. Limit sangat penting dalam bidang kalkulus dan digunakan untuk mendefinisikan kekontinuan, turunan, dan integral.

Misalkan f adalah suatu fungsi yang terdefinisi dalam interval terbuka yang meliputi bilangan a , kecuali (mungkin) pada titik a itu sendiri, maka limit $f(x)$ jika x mendekati a adalah L , dan

dituliskan:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \tag{1}$$

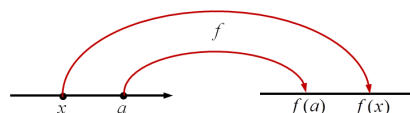
jika untuk setiap bilangan $\epsilon > 0$ terdapat suatu bilangan $\delta > 0$ sedemikian sehingga

$$0 < |x - a| < \delta \text{ maka } |f(x) - L| < \epsilon \tag{2}$$

Karena $|x - a|$ adalah jarak dari x ke a dan $|f(x) - L|$ adalah jarak dari $f(x)$ ke L , dan karena ϵ adalah sebarang bilangan kecil, maka definisi limit dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \tag{3}$$

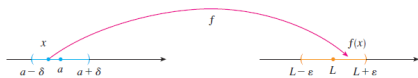
menyatakan bahwa jarak antara $f(x)$ dengan L dapat dibuat sekecil mungkin dengan memperhatikan bahwa jarak dari x ke a cukup kecil (tetapi tidak 0). Dengan kata lain, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ menyatakan bahwa nilai $f(x)$ dapat dibuat sedekat mungkin dengan L , dengan cara membuat x sedekat mungkin dengan a (tetapi tidak berimpit pada titik yang sama). Definisi di atas dapat dirumuskan kembali dari tinjauan interval dengan memperhatikan bahwa ketaksamaan $|x - a| < \delta$ ekuivalen dengan $-\delta < x - a < \delta$ yang selanjutnya dituliskan $a - \delta < x < a + \delta$. Pernyataan $0 < |x - a|$ benar jika dan hanya jika $x - a \neq 0$ yaitu $x \neq a$. Demikian juga, ketidaksamaan $|f(x) - L| < \epsilon$ ekuivalen dengan pasangan ketidaksamaan $L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon$. Karena itu, dalam bentuk interval, definisi di atas yang dapat dinyatakan dengan: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ menyatakan bahwa untuk setiap $\epsilon > 0$ (sekecil apapun nilai ϵ), dapat ditemukan $\delta > 0$ sedemikian sehingga jika x terletak di antara interval terbuka $(a - \delta, a + \delta)$ dan $x \neq a$ maka $f(x)$ terletak di dalam interval terbuka $(L - \epsilon, L + \epsilon)$. Pernyataan ini dapat diin-



Gambar 2: Diagram fungsi f

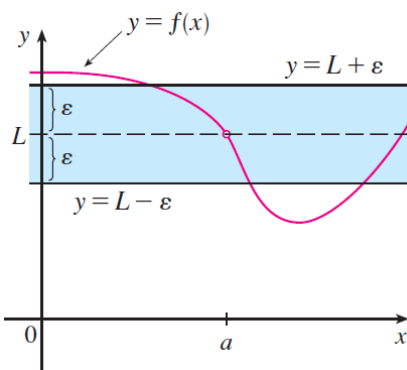
terpretasikan secara geometris dengan menggambarkan suatu fungsi dengan diagram anak panah,

dimana f merupakan pemetaan yang onto suatu subset \mathbb{R} ke subset \mathbb{R} yang lainnya. Definisi limit menyatakan bahwa jika terdapat sebarang interval $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ di sekitar L , maka kita dapat menemukan suatu interval $(a - \delta, a + \delta)$ di sekitar a sedemikian sehingga f memetakan semua titik-titik di dalam interval $(a - \delta, a + \delta)$ (mungkin kecuali a) ke interval $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. In-



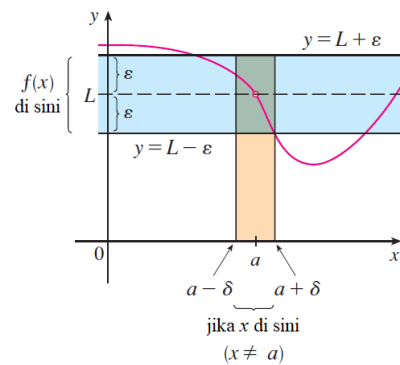
Gambar 3: Pemetaan f dalam interval tertentu

terpretasi geometrik lainnya tentang limit dapat dijelaskan dengan grafik fungsi. Jika terdapat $\varepsilon > 0$ maka kita dapat menggambarkan garis-garis horisontal $y = L + \varepsilon$ dan $y = L - \varepsilon$ dan grafik f . Jika $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ maka dapat ditemuk-

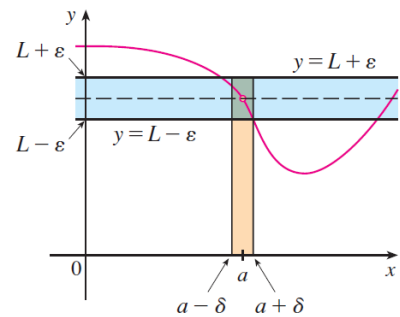


Gambar 4: Interpretasi geometrik limit dengan grafik fungsi

an suatu bilangan $\delta > 0$ sedemikian sehingga jika x diletakkan di dalam interval $(a - \delta, a + \delta)$ dan $x \neq a$ maka kurva $y = f(x)$ terletak di antara garis $y = L - \varepsilon$ dan $y = L + \varepsilon$. Jika nilai δ diketahui, maka sebarang nilai δ yang lebih kecil akan memenuhi pernyataan tersebut di atas. Proses yang diilustrasikan dalam Gambar 4 dan Gambar 5 berlaku untuk untuk semua bilangan positif ε sekecil apapun nilai yang dipilih. Gambar 6 memperlihatkan bahwa jika dipilih nilai ε yang lebih kecil, maka nilai δ juga akan lebih kecil.



Gambar 5: Kurva $y = f(x)$ terletak di antara garis $y = L - \varepsilon$ dan $y = L + \varepsilon$



Gambar 6: Jika nilai ε lebih kecil, maka nilai δ juga akan lebih kecil.

B. Limit Fungsi Trigonometri

Berbagai peristiwa alam memiliki sifat periodik. Medan-medan elektromagnetik terbentuk pada garis-garis yang periodik jaraknya dari sumber medannya, irama jantung yang berdetak periodik dengan waktu tertentu, pasang surut, perubahan cuaca, dan banyak peristiwa lainnya terjadi secara periodik. Perubahan-perubahan yang periodik seperti itu dapat dijelaskan dengan fungsi sinus dan kosinus.

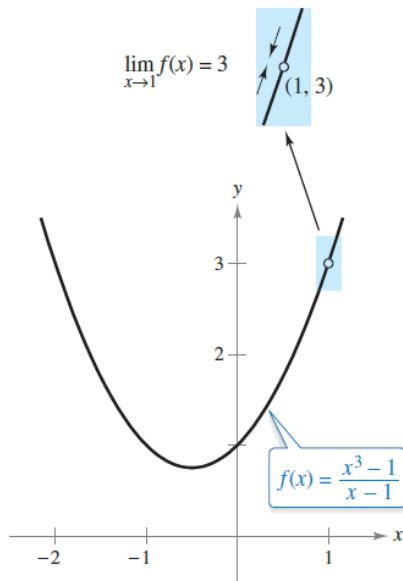
Sketsa grafik dari fungsi $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$ pada nilai-nilai $x \neq 1$, dapat digambarkan dengan teknik standar sketsa-kurva. Meskipun demikian pada titik $x = 1$ tidak dapat dipastikan nilainya. Untuk memperoleh gambaran tentang bagaimana sifat grafik fungsi f di sekitar titik $x = 1$, digunakan dua himpunan nilai x : satu himpunan mendekati nilai 1 dari sebelah kiri dan himpunan

lainnya mendekati 1 dari sebelah kanan (Larson & Edwards,2018:52). Pada Gambar 8, grafik f

	← x mendekati 1 dari kiri					x mendekati 1 dari kanan →				
x	0,75	0,9	0,99	0,999	1	1,001	1,01	1,1	1,25	
$f(x)$	2,313	2,710	2,970	2,997	?	3,003	3,030	3,310	3,813	
	f(x) mendekati 1 dari kiri →					f(x) mendekati 1 dari kanan ←				

Gambar 7: Pendekatan nilai $f(x)$ untuk $x = 1$

berbentuk parabola yang memiliki celah pada titik (1,3). Meskipun x tidak dapat bernilai sama dengan 1, kita tetap dapat membuat sedekat mungkin dengan 1, sehingga $f(x)$ bergerak mendekati 3. Dengan menggunakan notasi limit, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$. Penjelasan ini mengarah pada definisi informal limit. Jika $f(x)$ mendekati suatu bilangan L pada saat x mendekati c dari kiri maupun kanan, maka limit $f(x)$ saat x mendekati c adalah L . Limit ini dituliskan $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$.



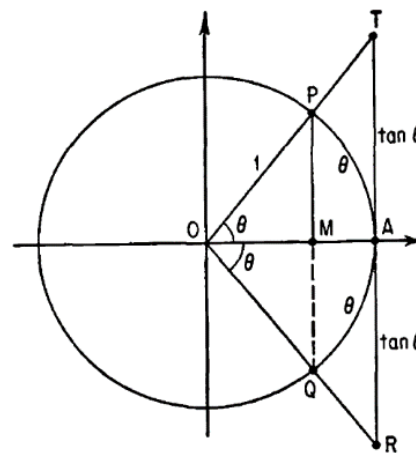
Gambar 8: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq 3$

Nilai pendekatan limit secara numerik dan secara geometris menghasilkan nilai perkiraan untuk limit. Jadi, setidaknya-tidaknya ada tiga pendekatan untuk menentukan nilai limit suatu fungsi. Ketiga pendekatan tersebut adalah

1. Pendekatan numerik (menyusun tabel nilai-nilai)

2. Pendekatan grafis (menggambarkan grafik secara manual maupun dengan menggunakan software komputer)
3. Pendekatan analitis (dengan menggunakan aljabar atau kalkulus)

Salah satu limit fungsi trigonometri yang paling penting dan fundamental adalah $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \approx 1$ dengan h dinyatakan dalam radian (Yates, 1961:37). Misalkan θ adalah sudut pusat AOP



Gambar 9: $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1, \theta$ dalam radian

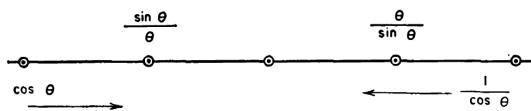
dari suatu lingkaran berjari-jari $OA = 1$ seperti terlihat pada Gambar 11. Garis PMQ tegak lurus terhadap OA dan RT menyinggung lingkaran di titik A . Jika θ dinyatakan dengan radian, maka luas daerah sektor lingkaran yang berjari-jari r dengan sudut pusat θ adalah $\frac{1}{2}r^2\theta$. Jadi luas daerah sektor OAP adalah θ . Luas daerah tersebut dan luas segitiga OQP dan ORT dapat dilihat bahwa untuk $0 < \theta < \pi/2$, bahwa $OQMP < OQAP < ORAT$. Karena $OM = \cos \theta, QP = 2 \sin \theta$, dan $RT = 2 \tan \theta$ ketidaksamaan ini dapat dituliskan menjadi

$$\sin \theta \cos \theta < \theta < \tan \theta \tag{4}$$

atau

$$\cos \theta < \frac{\theta}{\sin \theta} < \frac{1}{\cos \theta} \tag{5}$$

Nilai-nilai ini dapat disusun pada garis bilangan seperti gambar di bawah ini

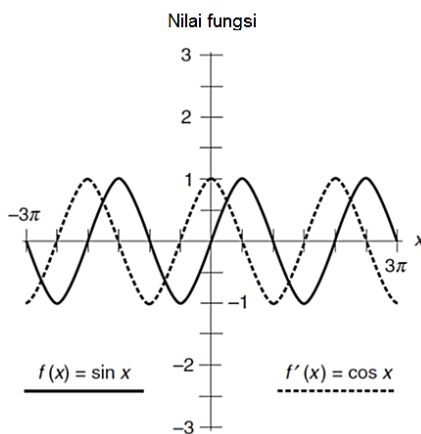


Gambar 10

Jika $\theta \rightarrow 0$ maka $\cos \theta \rightarrow 1$ dan $\frac{1}{\cos \theta} \rightarrow 1$. Karena nilai $\frac{\sin \theta}{\theta}$ dan $\frac{\theta}{\sin \theta}$ selalu berada di antara $\cos \theta$ dan $\frac{1}{\cos \theta}$ maka $\frac{\sin \theta}{\theta} \rightarrow 1$ dan $\frac{\theta}{\sin \theta} \rightarrow 1$.

C. Turunan Fungsi Sinus

Grafik fungsi untuk nilai x antara -3π dan 3π berbentuk kurva padat seperti diperlihatkan pada Gambar 11. Karena bentuknya menyerupai gelombang maka kurva sinus sering dinamakan gelombang sinus. Jika diuji lebih lanjut, dapat dilihat bahwa kemiringannya 0 ketika grafik tersebut mencapai titik maksimum lokal (*crest*) maupun minimum lokal (*trough*). Setiap titik maksimum maupun minimum terjadi pada rotasi $\frac{1}{4}$ putaran atau $\pi/2$ rad. Kedua kurva tersebut memotong sumbu x pada setiap titik dimana kemiringannya maksimum atau minimum. Grafik



Gambar 11: Turunan $\sin x$ adalah $\cos x$

kemiringan fungsi sinus yang menyatakan turunan fungsi sinus itu sendiri pada banyak titik di sepanjang sumbu x , terlihat bahwa grafiknya membentuk gelombang lain, yang diperlihatkan dengan garis putus-putus dalam Gam-

bar 11. Grafik turunan tersebut memiliki bentuk dan ukuran yang sama dengan gelombang sinus.

Pada Gambar 11, terlihat bahwa gelombang turunan bergeser sejauh $\pi/2$ rad ke sebelah kiri gelombang aslinya. Jarak pergeseran ini sering dinamakan panjang gelombang perempat (*quarter wavelength*) atau seperempat lingkaran (*quarter cycle*). Pada contoh ini, garis putus-putus menyatakan fungsi cosinus. Oleh karena itu, jika kita mendiferensialkan $f(x) = \sin x$ akan diperoleh $f'(x) = \cos x$.

Untuk menentukan turunan dari $f(x) = \sin x$, dengan x dinyatakan dalam radian, kita mengkombinasikan limit dan Teorema dengan identitas penjumlahan sudut fungsi sinus sebagai berikut. $\sin(x + h) = \sin x \cos h + \sin h \cos x$. Jika $f(x) = \sin x$, maka

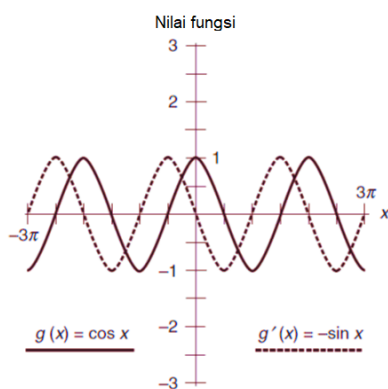
$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x + h) - \sin(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x(\cos h - 1) + \cos x \sin h}{h} \\ &= \sin x \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h}}_{\text{limit 0}} + \cos x \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h}}_{\text{limit 1}} \\ &= \cos x \end{aligned}$$

Karena itu $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$.

Dalam hal ini terjadi inkonsistensi penyelesaian nilai limit dalam baris kedua dari terakhir. Bagian pertama (limit 0), $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h}$ dihitungkan dengan pemahaman bahwa nilai $\cos h \approx 1 = 0$ karena $\cos h \approx \cos 0 = 1$, akibatnya $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$ dengan nilai $h \approx 0 = 0$ pada pembilang dan $h \neq 0$ pada penyebut. Pada bagian selanjutnya (limit 1) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \approx 1$, karena untuk $h \rightarrow 0$, $\sin h \approx h$ dengan $h \neq 0$. Pada bagian ini nilai $h \approx 0 \neq 0$ karena jika $h \approx 0 = 0$ maka $\frac{\sin h}{h}$ akan bernilai 0. Dapat dilihat adanya inkonsistensi $h \rightarrow 0$ dalam $\sin h$ dengan $\cos h$.

D. Turunan Fungsi Cosinus

Grafik fungsi $g(x) = \cos x$ untuk nilai-nilai x antara -3π dan 3π diperlihatkan dengan kurva padat dalam Gambar 12. Gelombang ini, seperti gelombang sinus, memiliki kemiringan 0 pada saat grafiknya mencapai maksimum lokal atau minimum lokal. Juga, seperti pada gelombang sinus, titik dengan kemiringan maksimum atau minimum terjadi pada $\pi/2$ rad. Satu-satunya perbedaan antara gelombang cosinus dan sinus adalah perbedaan letaknya pada sumbu horisontal, yang dinamakan fase. Jika kita menggambarkan



Gambar 12: Turunan cosinus adalah negatif sinus

kemiringan grafik fungsi cosinus pada banyak titik, akan terlihat bahwa grafik turunannya juga berbentuk grafik sinusoid lainnya, seperti terlihat pada Gambar 3. Gelombang turunan bergeser sejauh $\pi/2$ rad ke sebelah kiri gelombang aslinya. Grafik turunan yang baru ini merupakan gelombang sinus "terbalik". Jadi grafik turunan tersebut merupakan negatif dari fungsi sinus. Jika $g(x) = \cos x$ maka turunannya adalah $g'(x) = -\sin x$.

E. Aturan de l'Hôpital

Bentuk-bentuk limit yang menghasilkan nilai $0/0$ dan ∞/∞ dinamakan bentuk tak tentu (*indeterminate*) karena bentuk tersebut tidak menjamin bahwa limit suatu fungsi ada, dan juga tidak menunjukkan bentuk limit tersebut jika ada. Bentuk-bentuk tak tentu dapat diselesaikan dengan aturan yang ditemukan oleh ahli matemati-

ka Perancis, G.F.A. de l'Hôpital pada tahun 1669 (Struik, 1963:257), yang dikenal dengan nama l'Hôpital menyatakan bahwa

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)} \tag{6}$$

Tidak semua bentuk tak tentu dapat dihitung dengan menggunakan teknik-teknik manipulasi aljabar. Bentuk limit yang mengandung fungsi transenden dan juga bentuk aljabar biasa seringkali tidak dapat diselesaikan dengan manipulasi aljabar, misalnya $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}$ akan menghasilkan bentuk tak tentu, $0/0$. Dengan menuliskan kembali pernyataan tersebut, akan diperoleh $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{2x}}{x} - \frac{1}{x} \right)$ yang menghasilkan bentuk tak tentu lainnya, yaitu $\infty - \infty$. Dengan bantuan perangkat lunak komputer dapat diperkirakan nilai limit tersebut sama dengan 2. Karena substitusi langsung akan menghasilkan bentuk $0/0$, maka digunakan aturan de l'Hôpital.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dx} [e^{2x} - 1]}{\frac{d}{dx} [x]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{2x}}{1} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Jadi $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}$ bukannya bernilai $0/0$ melainkan sama dengan 2.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Robert C. Yates, 1961, Analytic Geometry with Calculus, New Jersey: Prentice Hall, Inc.
- [2] Ron Larson and Bruce Edwards, 2019, Calculus: Early Transcendental Functions With CalcChat and CalcView 7th Edition, Boston: Cengage
- [3] Ron Larson and Bruce Edwards, 2018, Calculus With CalcChat and CalcView 11st Edition, Boston: Cengage Learning

- [4] Howard Anton, Irl Bivens, Stephen Davis,
2015, *Calculus Early Transcendentals* 11th
Edition, USA.: John Wiley & Sons, Inc.